Ekstremne vrijednosti f-ja dviju promjenjivih

Neka je data f-ja $z = f(x, y)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

SISTEM

rješenjem sistema dobijemo stacionarne tačke koje mogu ali i ne moraju biti ekstrem

npr. $M(p_1, p_2)$ je jedna stacionarna tačka.

$$A = \frac{\partial^2 z(p_1, p_2)}{\partial x^2}$$

$$B = \frac{\partial^2 z(p_1, p_2)}{\partial x \partial y}$$

$$C = \frac{\partial^2 z(p_1, p_2)}{\partial y^2}$$

$D = AC - B^2$

$D > 0$ f-ja ima ekstrem u tački $M(p_1, p_2)$

a) $A > 0$ imamo z_{min}

b) $A < 0$ imamo z_{max}

$D < 0$ f-ja nema ekstrem

$D = 0$ potrebno ispitati ponašanje f-je u okolini stacionarne tačke:

$\Delta z(M) = z(p_1 + \varepsilon, p_2 + \omega) - z(p_1, p_2)$ – priraštaj f-je

$\Delta z \geq 0 \quad \forall \varepsilon ; \forall \omega \Rightarrow$ u tački M f-ja ima minimum

$\Delta z \leq 0 \quad \forall \varepsilon ; \forall \omega \Rightarrow$ u tački M f-ja ima maksimum

(#) Naći ekstreme f-je $z = x^2 - 2x - y - \ln(2-y) + 4$.

Rj.

$D: 2 - y > 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -1 - \frac{1}{2-y} \cdot (-1) = \frac{1}{2-y} - 1$$

$$2x - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2-y} - 1 = 0$$

$$x = 1, \quad y = 1$$

Tačka $M(1,1)$ je stacionarna tačka (kandidat za ekstrem)

$(2-y)^{-1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-1)(2-y)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(2-y)^2}$$

$M(1,1)$

$A = 2, \; B = 0, \; C = 1$

$D = AC - B^2 = 2 > 0$

F-ja ima ekstrem.

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$z_{min}(1,1) = 1 - 2 - 1 - \ln 1 + 4 = -2 + 4 = 2$$

Naći ekstreme f-je $z = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y$.

Rj: Pronađimo stacionarne tačke

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 5y + 7$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10y - 5x - 15$$

$$3x^2 - 5y + 7 = 0 \quad /\cdot 2$$
$$-5x + 10y - 15 = 0$$

$$6x^2 - 10y + 14 = 0$$
$$-5x + 10y - 15 = 0 \quad +$$

$$6x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2 \cdot 6}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2 \cdot 6} = \frac{-1}{6}, \quad x_2 = \frac{12}{12} = 1$$

$$6\left(x + \frac{1}{6}\right)(x - 1) = 0$$

Za $x_1 = -\frac{1}{6} \Rightarrow -5 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 10y - 15 = 0$

$$10y = 15 - \frac{5}{6}$$

$$10y = \frac{90 - 5}{6} = \frac{85}{6}$$

$$y = \frac{\cancel{85}^{17}}{\cancel{10}_{2} \cdot 6} = \frac{17}{12}$$

$x_2 = 1 \Rightarrow -5 + 10y - 15 = 0$

$$10y = 20$$

$$y = 2$$

Stacionarne tačke su $(1,2)$ i $\left(-\frac{1}{6}, \frac{17}{12}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10$$

Za $M_1(1,2)$

$A = 6$, $B = -5$, $C = 10$, $D = AC - B^2 = 60 - 25 > 0$

f-ja ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$z_{min}(1,2) = 1 - 10 + 20 + 7 - 30 = 8 + 10 - 30 = 8 - 20 = -12$

Za $M_2\left(-\frac{1}{6}, \frac{17}{12}\right)$

$A = -1$, $B = -5$, $C = 10$, $D = AC - B^2 = -10 - 25 = -35$

F-ja u ovoj tački nema ekstrem

Naći ekstreme f-je $z = x + y - \frac{3}{2}\ln(x^2+y^2+1)$.

Rj. Izračunajmo prve parcijalne izvode

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot \cancel{2}x = 1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot \cancel{2}y = 1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1}$$

Nađimo stacionarne tačke

$$1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1} = 0$$

$$1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1} = 0$$

$$3x = 3y \Rightarrow x = y$$

$$1 - \frac{3x}{2x^2+1} = 0 \quad / \cdot 2x^2+1$$

$$2x^2 + 1 - 3x = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

Stacionarne tačke su $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i $M_2(1,1)$

Nađimo druge parcijalne izvode

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 - 3 \cdot \frac{1\cdot(x^2+y^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = -3 \cdot \frac{-x^2+y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2} = 3\,\frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 - 3x \cdot (-1)(x^2+y^2+1)^{-2} \cdot 2y = 6\,\frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - 3\,\frac{1\cdot(x^2+y^2+1) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2} = -3\,\frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Za $M_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $A = 3 \cdot \frac{-1}{(\frac{1}{2}+1)^2} = \frac{-3}{\frac{9}{4}} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{4}{3}$

$D = AC - B^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} > 0$ f-ja ima ekstrem u tački M_1

$A < 0$ f-ja ima minimum $z_{min}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$

Za $M_2(1,1)$, $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$

$D = AC - B^2 = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} < 0$ f-ja u tački M_2 nema ekstrem

(#) Naći ekstreme f-je $z = x + y - \frac{3}{2}\ln(x^2+y^2+1)$.

Rj: Pronađimo prve parcijalne izvode

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2+1} = 1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2+1} = 1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1}$$

Pronađimo stacionarne tačke

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{3x}{x^2+y^2+1} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{3y}{x^2+y^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow x = y \text{ (djeljenjem jednačina)}$$

Sad imamo $x = y$ i $1 = \frac{3x}{x^2+y^2+1} \Rightarrow 1 = \frac{3x}{2x^2+1} \Rightarrow 2x^2-3x+1=0$

$D = 9-8 = 1$

$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}$

Stacionarne tačke su $M_1(1,1)$ i $M_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Pronađimo druge parcijalne izvode.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(1 - \frac{3x}{x^2+y^2+1}\right)'_x = \frac{-3(x^2+y^2+1)+3x\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{3x^2-3y^2-3}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(1 - \frac{3y}{x^2+y^2+1}\right)'_y = \left|\begin{array}{l}\text{zbog}\\ \text{simetričnosti}\end{array}\right| = \frac{3y^2-3x^2-3}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{3x\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{6xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Za tačku $M_1(1,1)$: $A = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$, $D = AC - B^2$

$D = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} < 0 \Rightarrow$ u M_1 f-ja nema ekstrema

Za tačku $M_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $A = \frac{-3}{(\frac{3}{2})^2} = -\frac{3}{\frac{9}{4}} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3} \Rightarrow C = -\frac{4}{3}$

$B = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, $D = AC - B^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_2 ima ekstrem

$A < 0 \Rightarrow$ u M_2 f-ja ima maximum. $z_{max}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1) = 1 - \ln\frac{27}{8}$

(#) Naći ekstreme f-je $z = \frac{8}{x} + \frac{x^2}{y} + y + 1.$

Rj. Pronađimo stacionarne tačke

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8 \cdot (-1)\, x^{-2} + 2\,\frac{x}{y} = \frac{-8}{x^2} + 2\,\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot (-1)\, y^{-2} + 1 = \frac{-x^2}{y^2} + 1$$

$$-\frac{8}{x^2} + \frac{2x}{y} = 0$$

$$-\frac{x^2}{y^2} + 1 = 0$$

$$\frac{8}{x^2} - 2\,\frac{x}{y} = 0$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 1$$

Prema tome $\frac{x}{y} = 1$ i $\frac{x}{y} = -1$

Za $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \frac{8}{x^2} - 2 \cdot 1 = 0$

$$\frac{8}{x^2} = 2 \quad / \cdot x^2 \ (x \neq 0)$$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x_1 = -2, \ x_2 = 2$

$x_1 = -2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1$

$y = -2$

$(-2, -2)$

za $x_2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = 1$

$y_2 = 2$

$(2, 2)$

Za $\frac{x}{y} = -1$ imamo

$$\frac{8}{x^2} + 2 = 0$$

$$\frac{8}{x^2} = -2 \quad / \cdot x^2 \ (x \neq 0)$$

$-2x^2 = 8$

ova jednačina nema rješenja u skupu realnih brojeva

Stacionarne tačke su $M_1(-2, -2)$ i $M_2(2, 2)$.

Nađimo druge parcijalne izvode

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (-8)(-2)\, x^{-3} + \frac{2}{y} = \frac{16}{x^3} + \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x \cdot (-1)\, y^{-2} = \frac{-2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cdot (-2)\, y^{-3} = \frac{2x^2}{y^3}$$

Za $M_2(2, 2)$

$A = 2 + 1 = 3, \quad B = \frac{-4}{4} = -1, \quad C = \frac{8}{8} = 1$

$D = AC - B^2 = 3 - 1 = 2 > 0$ f-ja ima ekstrem

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$z_{min}(2, 2) = 4 + 2 + 2 + 1 = 9$$

Za $M_1(-2, -2)$

$A = \frac{16}{-8} + \frac{2}{-2} = -2 - 1 = -3$

$B = \frac{-2 \cdot (-2)}{4} = 1, \quad C = \frac{2 \cdot 4}{-8} = -1$

$D = AC - B^2 = 3 - 1 = 2 > 0$

f-ja u tački $M_1(-2, -2)$ ima ekstrem,

$A < 0$ f-ja ima maksimum

$$z_{max}(-2, -2) = -4 - 2 - 2 + 1 = -7$$

Naći ekstreme f-je $z=(x^2+y)\sqrt{e^y}$.

Rj. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sqrt{e^y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{e^y} + (x^2+y)\frac{1}{2\sqrt{e^y}}\cdot e^y = \sqrt{e^y} + (x^2+y)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{e^y}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y + 1\right)\sqrt{e^y} = \frac{1}{2}(x^2+y+2)\sqrt{e^y}$$

$$2x\sqrt{e^y} = 0$$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)\sqrt{e^y} = 0$$

$e^y > 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$

prema tome $x=0$

$\sqrt{e^y} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2+y+2=0$

$x=0 \Rightarrow y+2=0$

$y=-2$

$M(0,-2)$ je stacionarna tačka (kandidat za ekstrem)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\sqrt{e^y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x\frac{1}{2\sqrt{e^y}}\cdot e^y = x\sqrt{e^y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{e^y} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y + 1\right)\frac{e^y \cdot\sqrt{e^y}}{2\sqrt{e^y}\cdot\sqrt{e^y}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^y}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y + 2\right)$$

$M(0,-2)$

$A = 2\sqrt{e^{-2}} = 2\frac{1}{\sqrt{e^2}}$

$B = 0$

$C = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-2}}\left(\frac{1}{2}0 + \underbrace{\frac{1}{2}(-2)}_{-1} + 2\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{e^2}}$

$D = AC - B^2 = \frac{2}{\sqrt{e^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^2}} = \frac{1}{e^2}$

$D>0 \Rightarrow$ f-ja ima ekstrem

$A>0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$z_{min}(0,-2) = (0-2)\sqrt{e^{-2}} = (-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{e^2}} \approx -0.7358$$

(#) Naći ekstreme f-je $z = e^{-2x^2}(x-y^2)$.

Rj. Nađimo stacionarne tačke

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-2x^2}\cdot(-4)x(x-y^2)+e^{-2x^2}\cdot 1 = e^{-2x^2}(-4x^2+4xy^2+1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-2x^2}\cdot(-2)y = -2ye^{-2x^2}$$

$$e^{-2x^2}(-4x^2+4xy^2+1)=0$$
$$-2y\,e^{-2x^2}=0$$

e^{-2x^2} je uvijek pozitivno

$$-4x^2+4xy^2+1=0$$
$$-2y=0 \Rightarrow y=0$$

$$-4x^2+1=0$$
$$x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2}$$

Stacionarne tačke su $M_1(-\frac{1}{2},0)$ i $M_2(\frac{1}{2},0)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-2x^2}\cdot(-4x)(-4x^2+4xy^2+1)+e^{-2x^2}(-8x+4y^2) =$$
$$= e^{-2x^2}(16x^3-16x^2y^2-4x-8x+4y^2) = e^{-2x^2}(16x^3-16x^2y^2-12x+4y^2)$$
$$=4e^{-2x^2}(4x^3-4x^2y^2-3x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = e^{-2x^2}(8xy) = 8xye^{-2x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2e^{-2x^2}$$

Za tačku $M_1(-\frac{1}{2},0)$

$$A=4e^{-2\cdot\frac{1}{4}}(4\cdot(-\frac{1}{8})-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 0-3(-\frac{1}{2})+0) = 4e^{-\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}) = \frac{4}{\sqrt{e}}$$

$B=0$, $C=-2e^{-2\cdot\frac{1}{4}} = -2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{e}}$

$D=AC-B^2 = \frac{-8}{e} < 0$

F-ja z u tački M_1 nema ekstrem

Za tačku $M_2(\frac{1}{2},0)$

$$A=4e^{-2\cdot\frac{1}{4}}(4\cdot\frac{1}{8}-0-3\cdot\frac{1}{2}+0) =$$
$$=4e^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}) = \frac{-4}{\sqrt{e}}$$

$B=0$, $C=-2e^{-2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{-2}{\sqrt{e}}$

$D=AC-B^2=\frac{8}{e}>0 \Rightarrow$ f-ja z u tački M_2 ima ekstrem

$A<0 \Rightarrow z_{max}(\frac{1}{2},0) = e^{-2\cdot\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}-0) = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$

\# Odrediti ekstremne vrijednosti f-je

$$z = \frac{xy}{2} + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}y + (-1)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) + (47 - x - y)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + \frac{47}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y$$

$$= -\frac{2}{3}x + \frac{6-3-4}{12}y + \frac{47}{3} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{12}y + \frac{47}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}x + (-1)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) + (47 - x - y)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y + \frac{47}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y$$

$$= -\frac{1}{12}x - \frac{1}{2}y + \frac{47}{4}$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{12}y + \frac{47}{3} = 0 \quad /\cdot 12$$

$$-\frac{1}{12}x - \frac{1}{2}y + \frac{47}{4} = 0 \quad /\cdot 12$$

$$-8x - y + 188 = 0$$

$$-x - 6y + 141 = 0$$

$$-8x - y + 188 = 0$$

$$x = -6y + 141$$

$$-8(-6y + 141) - y + 188 = 0$$

$$48y - 1128 - y + 188 = 0$$

$$47y = 940$$

$$y = 20$$

$$x = -6y + 141 = -120 + 141 = 21$$

Stacionarna tačka je $M(21, 20)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}$$

$D = AC - B^2$

$M(21, 20)$

$A = -\frac{2}{3}, \quad B = -\frac{1}{12}, \quad C = -\frac{1}{2}$

$$D = \frac{2}{6} - \frac{1}{144} = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0$$

f-ja z ima ekstrem

$A < 0$ f-ja ima maksimum

$$z_{max}(21, 20) = 21\cdot 10 + (47 - 41)(7 + 5) = 210 + 6\cdot 12 = 210 + 72 = 282$$

$z_{max}(21, 20) = 282$ traženi ekstrem f-je

Nađi ekstreme f-je $z = x^4 + y^4 - 2x^2$.

Rj: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x$ $\quad$ $\begin{array}{l} 4x^3 - 4x = 0 \quad /:4 \\ 4y^3 = 0 \quad /:4 \\ \hline x^3 - x = 0 \\ y^3 = 0 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} x(x^2-1) = 0 \\ y^3 = 0 \\ \hline x(x-1)(x+1) = 0 \\ y^3 = 0 \\ \hline \end{array}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3$

$y = 0 \wedge (x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1)$

Stacionarne tačke f-je su $M_1(-1,0)$, $M_2(0,0)$ i $M_3(1,0)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4$ $\quad$ za $M_1(-1,0)$, $A = 8$, $B = 0$, $C = 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ $\quad$ $D = 0$ ispitujemo ponašanje f-je u okolini tačke $M_1(-1,0)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2$ $\quad$ $\Delta z = z(-1+\varepsilon, 0+\omega) - z(-1,0) =$

$= (-1+\varepsilon)^4 + \omega^4 - 2(-1+\varepsilon)^2 - [(-1)^4 + 0^4 - 2(-1)^2]$

paskalov trougao

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$= 1 - 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \omega^4 - 2(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2) - (1-2)$

$= 1 - 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \omega^4 - 2 + 4\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 1$

$= \varepsilon^4 - 4\varepsilon^3 + 4\varepsilon^2 + \omega^4 = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 4) + \omega^4$

$= \varepsilon^2(\varepsilon - 2)^2 + \omega^4 \geq 0$ za $\forall \varepsilon$ i $\forall \omega$

f-ja ima minimum u tački $M_1(-1,0)$, $z_{min} = -1$

za $M_2(0,0)$, $A = -4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = AC - B^2 = 0$

ispitujemo ponašanje f-je u okolini tačke

$\Delta z = z(0+\varepsilon, 0+\omega) - z(0,0) = \varepsilon^4 + \omega^4 - 2\varepsilon^2 = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 2) + \omega^4$

$\varepsilon = 0: \quad \Delta z = \omega^4$

$\omega = 0: \quad \Delta z = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 2) \Rightarrow \Delta z < 0$ za $\varepsilon^2 < 2$

$\Delta z > 0$ za $\varepsilon^2 > 2$

Priraštaj f-je je promjenjivog znaka pa f-ja nema ekstrem u tački M_2

za $M_3(1,0)$, $A = 8$, $B = 0$, $C = 0$, $D = AC - B^2 = 0$ ispitujemo ponašanje f-je u okolini tačke

$\Delta z = z(1+\varepsilon, 0+\omega) - z(1,0) = (1+\varepsilon)^4 + \omega^4 - 2(1+\varepsilon)^2 - (1-2)$

$= 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \omega^4 - 2 - 4\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 1 = \varepsilon^4 + 4\varepsilon^3 + 4\varepsilon^2 + \omega^4$

$\Delta z = \varepsilon^2(\varepsilon + 2)^2 + \omega^4 \geq 0 \quad \forall \varepsilon$ i $\forall \omega$ $\quad$ f-ja z u tački M_3 ima min

$z_{min} = -1$

(#) Naći ekstreme f-je $z=(2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x\cdot e^{-x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}\cdot(-2x)=(4x-4x^3-6xy^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y e^{-x^2-y^2}+(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}\cdot(-2y)=(6y-4x^2y-6y^3)e^{-x^2-y^2}$$

$$2x(2-2x^2-3y^2)e^{-x^2-y^2}=0$$
$$2y(3-2x^2-3y^2)e^{-x^2-y^2}=0$$

$e^{-x^2-y^2}\neq 0 \ \forall(x,y\in R)$

$x=0$; $y=0$, $M_1(0,0)$

ili

$x=0$ i $3-2x^2-3y^2=0$

$3y^2=3$

$y^2=1$

$y_{1,2}=\pm 1$

$M_2(0,-1)$

$M_3(0,1)$

ili $2-2x^2-3y^2=0$; $y=0$

$2x^2=2$

$x^2=1$

$x_{1,2}=\pm 1$

$M_4(-1,0)$

$M_5(1,0)$

ili

$$\begin{array}{r} 2-2x^2-3y^2=0 \\ -\ \ 3-2x^2-3y^2=0 \\ \hline -1=0 \end{array}$$

sistem nema rješenja

Stacionarne tačke su M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(4-12x^2-6y^2)e^{-x^2-y^2}+(4x-4x^3-6xy^2)e^{-x^2-y^2}(-2x)=(8x^4+12x^2y^2-20x^2-6y^2+4)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(-12xy)e^{-x^2-y^2}+(4x-4x^3-6xy^2)e^{-x^2-y^2}(-2y)=(-20xy+8x^3y+12xy^3)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(6-4x^2-18y^2)e^{-x^2-y^2}+(6y-4x^2y-6y^3)e^{-x^2-y^2}\cdot(-2y)=(-30y^2+12y^4+8x^2y^2-4x^2+6)e^{-x^2-y^2}$$

za $M_1(0,0)$, $A=4$, $B=0$, $C=6$, $D=AC-B^2=24>0$ ima ekstrem

$A>0$ ima minimum, $z_{min}(0,0)=0$

za $M_2(0,-1)$, $A=-2e^{-1}$, $B=0$, $C=-12e^{-1}$, $D=AC-B^2=24e^{-2}>0$ ima ekstrem

$A<0$ ima maksimum, $z_{max}(0,-1)=3e^{-1}$

za $M_3(0,1)$, $A=-2e^{-1}$, $B=0$, $C=-12e^{-1}$, $D=AC-B^2=24e^{-2}>0$ ima ekstrem

$A<0$ ima maksimum $z_{max}(0,1)=3e^{-1}$

za $M_4(-1,0)$, $A=-8e^{-1}$, $B=0$, $C=2e^{-1}$, $D=AC-B^2=-16e^{-2}<0$

f-ja u tački $M_4(-1,0)$ nema ekstrem

za $M_5(1,0)$, $A=-8e^{-1}$, $B=0$, $C=2e^{-1}$,

f-ja u tački $M_5(1,0)$ nema ekstrem

(#) Naći stacionarne tačke f-je $z = xy\ln(x^2+y^2)$.

Rj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\ln(x^2+y^2) + xy\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

$$y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0$$
$$x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

$$y\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = 0$$
$$x\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$y=0$ ili $\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0$

$x=0$ ili $\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0$

$y=0$ i $x=0$ $\quad M_1(0,0)$

za M_1 f-ja nije definisana

ili

$y=0$ i $\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0$

$$\ln x^2 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x_1 = -1,\quad x_2 = 1$$

$M_2(-1,0)$, $M_3(1,0)$

ili

$\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0$ i $x=0$

$$\ln y^2 = 0$$
$$y_1 = -1 \quad y_2 = 1$$

$M_4(0,-1)$

$M_5(0,1)$

ili

$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \quad (1)$$
$$\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \quad (2)$$

(1)−(2): $\frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0$

$$2x^2 - 2y^2 = 0$$

$$2(x^2-y^2) = 0$$
$$2(x-y)(x+y) = 0$$
$x = y$ ili $x = -y$.

za $x=y$: $\ln(2x^2) + 1 = 0$

$$\ln(2x^2) = -1$$
$$e^{-1} = 2x^2$$

$x^2 = \frac{1}{2e}$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$

$M_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $M_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

za $y=-x$: $\ln(2x^2) + 1 = 0$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}$

$M_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

$M_9\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

Stacionarne tačke su: $M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ i M_9.

Uslovni ekstremi f-ja dviju promjenjivih

Ako trebamo naći ekstrem f-je $z=f(x,y)$ tako da x i y zadovoljavaju neki uslov $g(x,y)=0$ tada tražimo ekstrem Lagranžove f-je $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z}=0\end{array}\right.$$

SISTEM

rješavanjem sistema dobićemo neke stacionarne tačke i dalji proces se nastavlja kao kod traženja ekstrema f-je dvije promjenjive

II način: neka je $M(p_1,p_2)$ neka stacionarna tačka

$$d^2F(p_1,p_2)=F''_{xx}(p_1,p_2)\,dx^2+2F''_{xy}(p_1,p_2)\,dx\,dy+F''_{yy}(p_1,p_2)\,dy^2$$

$$d^2F(p_1,p_2)>0 \Rightarrow z_{min}(p_1,p_2)$$

$$d^2F(p_1,p_2)<0 \Rightarrow z_{max}(p_1,p_2)$$

Ako se desi slučaj da imamo više uslova, onda uvodimo više parametara $(\lambda,\mu,\dots)$.

1. Naći ekstreme f-je $z=6-4x-3y$ uz uslov $x^2+y^2=1$.

Rj. $F(x,y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1)\cancel{=0}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1$$

$$\begin{array}{c}2\lambda x-4=0\\ 2\lambda y-3=0\\ x^2+y^2-1=0\\ \hline 2\lambda x=4\\ 2\lambda y=3\\ x^2+y^2=1\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{c}x=\dfrac{2}{\lambda}\\ y=\dfrac{3}{2\lambda}\\ x^2+y^2=1\\ \hline \dfrac{4}{\lambda^2}+\dfrac{9}{4\lambda^2}=1\\ \dfrac{25}{4\lambda^2}=1\end{array}$$

$$4\lambda^2=25$$

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{5}{2}$$

$$\lambda_1=-\frac{5}{2} \Rightarrow x_1=-\frac{4}{5}\ ;\ y_1=\frac{3}{2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}=-\frac{3}{5}$$

$$\lambda_2=\frac{5}{2} \Rightarrow x_2=\frac{2}{\frac{5}{2}}=\frac{4}{5}\ ;\ y_2=\frac{3}{2\cdot\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$$

Stacionarne tačke su $M\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ za $\lambda=-\frac{5}{2}$ i $N\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ za $\lambda=\frac{5}{2}$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$ za $M(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $\lambda = -\frac{5}{2}$

$A=-5$, $B=0$, $C=-5$, $D=AC-B^2=25>0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$ f-ja ima ekstrem, $A<0$ f-ja ima maksimum

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$ $z_{max}(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 6-4(-\frac{4}{5})-3(-\frac{3}{5}) = \frac{30+16+9}{5} = \frac{55}{5} = 11$

za $N(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $\lambda = \frac{5}{2}$, $A=5$, $B=0$, $C=5$, $D=AC-B^2=25>0$

f-ja ima ekstrem u tački N, $A>0$ f-ja ima minimum

$z_{min}(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = 6-4\cdot\frac{4}{5}-3\cdot\frac{3}{5} = \frac{30-16-9}{5} = \frac{5}{5} = 1$

2. Naći uslovne ekstreme f-je $z=y+2x+3$ uz uslov $x^2-6x+y+5=0$.

Rj. $F(x,y) = 2x+y+3+\lambda(x^2-6x+y+5)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2+2\lambda x-6\lambda$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1+\lambda$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2-6x+y+5$

$2\lambda x-6\lambda+2=0 \quad /:2$

$\lambda+1=0$

$x^2-6x+y+5=0$

$\lambda x = 3\lambda-1$

$\lambda=-1$

$x^2-6x+y+5=0$

$-x=-3-1$

$x=4$

$x^2-6x+y+5=0$

$16-24+y+5=0$

$y=3$

Tačka $M(4,3)$ je stacionarna tačka, za $\lambda=-1$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$

$M(4,3)$, $\lambda=-1$

$A=-2$, $B=0$, $C=0$ $\Rightarrow$ $D=AC-B^2=0$

$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cancel{dxdy} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$

$d^2F = 2\lambda\, dx^2 \Rightarrow d^2F = -2\,dx^2 < 0$

U tački $M(4,3)$ f-ja ima maksimum, $z_{max}(4,3) = 3+8+3 = 14$

3. Odrediti ekstreme f-je $z=x^2+y^2$ uz uslov $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

Rj. $z_{min}(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}) = \frac{36}{13}$, $\lambda = -\frac{72}{13}$

4. Naći uslovne ekstreme f-je $z=\ln(x+y)$, ako je $x^2+2y^2=4$.

Rj. $z_{max}(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}) = \ln(3\sqrt{\frac{2}{3}})$, $\lambda = -\frac{1}{8}$

(#) Naći uslovne ekstreme f-je $z=2x^4+8y^4+24$ ako je $8x+4y=1$.

Rj.

$$F(x,y,\lambda)=2x^4+8y^4+24+\lambda(8x+4y-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=8x^3+8\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=32y^3+4\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=8x+4y-1$$

$$8x^3+8\lambda=0 \quad /:8$$
$$32y^3+4\lambda=0 \quad /:4$$

$$x^3+\lambda=0$$
$$-\quad 8y^3+\lambda=0$$

$$x^3-8y^3=0$$
$$x^3=8y^3$$
$$x=2y$$

$$8x+4y-1=0$$
$$8\cdot 2y+4y-1=0$$
$$20y=1$$
$$y=\frac{1}{20}$$
$$x=2\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{10}.$$

$M_1\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)$ je stacionarna tačka

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=24x^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=96y^2$$

$$D=AC-B^2$$

$M_1\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)$

$$A=24\cdot\frac{1}{100}=\frac{24}{100}=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$$

$$B=0$$

$$C=\cancel{96}^{\,\cancel{48}\,24}\cdot\frac{1}{\cancel{20}_{10}\cdot\cancel{20}_{10}}=\frac{24}{100}=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$$

$D=\left(\frac{6}{25}\right)^2>0$ f-ja ima ekstrem

$A>0$ f-ja ima minimum

$$z_{min}\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)=2\cdot\frac{1}{10^4}+8\cdot\frac{1}{20^4}+24=\frac{2}{10\,000}+\frac{\cancel{8}^{\,\cancel{2}\,\cancel{4}\,1}}{\cancel{20}_{10}\cdot\cancel{20}_{10}\cdot\cancel{20}_{10}\cdot 20}+24$$

$$=\frac{2}{10\,000}+\frac{1}{20\,000}+\frac{24\,000}{1\,000}=\frac{4+1+480\,000}{20\,000}=$$

$$=\frac{480\,005}{20\,000}\begin{matrix}:5\\:5\end{matrix}=\frac{96\,001}{4\,000}$$

$z_{min}=\frac{96\,001}{4000}$ je minimum f-je u tački $M\left(\frac{1}{10},\frac{1}{20}\right)$

\# Naći uslovne ekstreme f-je $z=(x-y)^4+1$ ako je $x^2+y^2=18$.

Rj. $F(x,y,\lambda)=(x-y)^4+1+\lambda(x^2+y^2-18)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4(x-y)^3+2\lambda x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4(x-y)^3\cdot(-1)+2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-18$$

$$4(x-y)^3+2\lambda x=0 \quad \ldots(1)$$

$$-4(x-y)^3+2\lambda y=0 \quad \ldots(2)$$

$$x^2+y^2-18=0 \quad \ldots(3)$$

(1) (2): $2\lambda x+2\lambda y=0$ $/:2$

$\lambda(x+y)=0$

$\lambda=0$ ili $x+y=0$

a) $x+y=0$

$x=-y$

$(-y)^2+y^2=18$

$2y^2=18$

$y_{1,2}=\pm 3$

$y_1=-3 \Rightarrow x_1=3$

$y_2=3 \Rightarrow x_2=-3$

$M_1(3,-3)$, $M_2(-3,3)$

za M_1 (1) $\Rightarrow 6\lambda=-4\cdot 6^3$

za M_2 (1) $\Rightarrow -6\lambda=-4\cdot(-6)^3$

$\Rightarrow \lambda=-144$

b) $\lambda=0$

(1) $\Rightarrow 4(x-y)^3=0$

$x=y$

$2y^2=18$

$y_{3,4}=\pm 3$

$M_3(-3,-3)$

$M_4(3,3)$

$\lambda=0$

Stacionarne tačke su $M_1(3,-3)$ $M_2(-3,3)$ za $\lambda=-144$ i $M_3(-3,-3)$ i $M_4(3,3)$ za $\lambda=0$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=12(x-y)^2+2\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x\partial y}=-12(x-y)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^2}=12(x-y)^2+2\lambda$$

$D=AC-B^2$

$M_1(3,-3)$, $\lambda=-144$

$A=12\cdot 36-2\cdot 144=144$

$B=-12\cdot 36=-432$

$C=144$

$D=20\,736-186\,624$

f-ja u tački M_1 nema ekstrema

$M_2(-3,3)$, $\lambda=-144$

$$\left.\begin{array}{l} A=144 \\ B=432 \\ C=144 \end{array}\right\} D<0$$

f-ja u tački M_2 nema ekstrem

$M_3(-3,-3)$, $\lambda=0$

$A=0$, $B=0$, $C=0$ $\Rightarrow$ $D=0$ potrebno je ispitati f-ju u okolini tačke $M_3(-3,-3)$

$$\Delta z(M_3)=z(-3+\varepsilon,-3+\omega)-z(-3,-3)=(-3+\varepsilon+3-\omega)^4+1-1=(\varepsilon-\omega)^4>0 \quad \forall\varepsilon \text{ i } \forall\omega$$

Priraštaj f-je u okolini tačke M_3 je pozitivan pa f-ja u M_3 ima minimum, $z_{min}(-3,-3)=1$

$M_4(3,3)$, $\lambda=0$

$A=0$, $B=0$, $C=0$ $\Rightarrow$ $D=0$ potrebno je ispitati f-ju u okolini tačke $M_4(3,3)$

$$\Delta z(M_4)=z(3+\varepsilon,3+\omega)-z(3,3)=(3+\varepsilon-3-\omega)^4+1-1=(\varepsilon-\omega)^4>0 \quad \forall\varepsilon \text{ i } \forall\omega$$

Priraštaj f-je u okolini tačke M_4 je pozitivan pa f-ja u M_4 ima minimum, $z_{min}(3,3)=1$.

(#) Nađi uslovne ekstreme f-je $z = 2x+4y$ ako je
$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3.$

Rj. Formirajmo Lagranžovu f-ju $F(x,y,\lambda) = 2x+4y+\lambda\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-3\right).$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + 2\lambda \cdot \frac{(-1)}{x^2}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)(x^{-2})$ $(x^{-2})' = (-2)x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 4 + 4\lambda \cdot \frac{(-1)}{y^2}$

Formirajmo sistem

$$4 - \frac{4\lambda}{y^2} = 0 \quad /:4$$
$$2 - \frac{2\lambda}{x^2} = 0 \quad /:2$$
$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3$$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 3$

$$1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \qquad 1 = \frac{\lambda}{x^2} \quad (1)$$
$$1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \qquad 1 = \frac{\lambda}{y^2} \quad (2)$$
$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3 \qquad \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3 \quad (3)$$

(1) i (2) $\Rightarrow \frac{\lambda}{x^2} = \frac{\lambda}{y^2} \Rightarrow x^2 = y^2$

tj. $x = \pm y$

za $x = y$ iz (3) $\frac{2}{x} + \frac{4}{x} = 3$

$\frac{6}{x} = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$

za $x = -y$ iz (3)

$\frac{2}{x} - \frac{4}{x} = 3 \Rightarrow -\frac{2}{x} = 3$

$3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}$

za $M_1(2,2) \Rightarrow 2 - 2\lambda \cdot \frac{1}{4} = 0$

$\lambda = 4$

za $M_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2 - 2\lambda \cdot \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{9}$

Stacionarne tačke su $M_1(2,2)$ za $\lambda = 4$ i $M_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ za $\lambda = \frac{4}{9}$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{4\lambda}{x^3}$

Za $M_1(2,2)$, $\lambda = 4$

$A = \frac{16}{8} = 2$, $B = 0$, $C = \frac{32}{8} = 4$, $D = AC - B^2 = 8 > 0$ f-ja ima ekstrem

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

$A > 0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{8\lambda}{y^3}$

$z_{min}(2,2) = 4 + 8 = 12$

Za $M_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\lambda = \frac{4}{9}$, $A = \frac{\frac{16}{9}}{-\frac{8}{27}} = -\frac{16 \cdot 27}{8 \cdot 9} = -2 \cdot 3 = -6$

$B = 0$, $C = \frac{\frac{32}{9}}{\frac{8}{27}} = \frac{32 \cdot 27}{8 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12$, $D = AC - B^2 = -72 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f-ja u tački M_2 nema ekstremnu vrijednost

(#) Naći uslovne ekstreme f-je $z=xy$ ako je $x^2+y^2=2ax$, $a>0$.

Rj: Posmatramo f-ju $F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-2ax)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x-2a\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2ax$$

$$\begin{aligned} y+2\lambda x-2a\lambda&=0\\ x+2\lambda y&=0\\ x^2+y^2-2a\cdot x&=0 \end{aligned}$$

(1) $y+2\lambda(x-a)=0 \Rightarrow x-a=\frac{-y}{2\lambda}$ ...(*)

(2) $x=-2\lambda y$

(3) $x^2-2\cdot x\cdot a+a^2-a^2+y^2=0$

(2) u (1): $y+2\lambda(-2\lambda y-a)=0$

(3): $(x-a)^2+y^2=a^2$

$$y-4\lambda^2y-2a\lambda=0$$

$$y(1-4\lambda^2)=2a\lambda$$

$$y=\frac{2a\lambda}{1-4\lambda^2}$$

(*) u (3):

$$\frac{y^2}{4\lambda^2}+y^2=a^2$$

$$y^2\left(\frac{1}{4\lambda^2}+1\right)=a^2$$

$$y^2\left(\frac{1+4\lambda^2}{4\lambda^2}\right)=a^2$$

$$y^2=\frac{4a^2\lambda^2}{1+4\lambda^2}$$

$$y=\frac{2a\lambda}{\pm\sqrt{1+4\lambda^2}}$$

$$y=\frac{2a\lambda}{1-4\lambda^2}=\frac{2a\lambda}{\pm\sqrt{1+4\lambda^2}} \Rightarrow 1-4\lambda^2=\pm\sqrt{1+4\lambda^2}$$

$$(1-4\lambda^2)^2=1+4\lambda^2$$

$$16\lambda^4-8\lambda^2+1=1+4\lambda^2$$

$$16\lambda^4-12\lambda^2=0$$

$$\lambda^2(16\lambda^2-12)=0$$

$\lambda_1=0$

$\lambda_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{12}{16}}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_1=0$: $y=0$, $x=0$

$\lambda_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned} y+\sqrt{3}x-a\sqrt{3}&=0\\ x+y\sqrt{3}&=0 \quad /\cdot\sqrt{3}\\ x^2+y^2-2ax&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3}x+y&=a\sqrt{3}\\ -\quad \sqrt{3}x+3y&=0 \end{aligned}$$

$-2y=a\sqrt{3}$ $\quad x=\frac{3}{2}a$

$y=\frac{-a}{2}\sqrt{3}$

$\lambda_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned} y-x\sqrt{3}+a\sqrt{3}&=0\\ x-y\sqrt{3}&=0 \quad /\cdot\sqrt{3}\\ x^2+y^2-2ax&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x\sqrt{3}+y&=-a\sqrt{3}\\ +\quad x\sqrt{3}-3y&=0 \end{aligned}$$

$-2y=-a\sqrt{3}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow x=\frac{3}{2}a$

Stacionarne tačke su $M_1(0,0)$ za $\lambda=0$, $M_2(\frac{3}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ za $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $M_3(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ za $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=1$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda$$

$M_1(0,0)$, $\lambda=0$

$D=AC-B^2=-1<0 \Rightarrow$ f-ja u tački $M_1(0,0)$ nema ekstrem

$M_2(\frac{3}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$, $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$D=AC-B^2=3-1=2>0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_2 ima ekstrem

$A=\sqrt{3}>0 \Rightarrow$ f-ja ima minimum

$$Z_{min}\left(\frac{3}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

$M_3(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ za $\lambda=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$D=AC-B^2=3-1>0 \Rightarrow$ f-ja ima ekstrem

$A=-\sqrt{3}<0 \Rightarrow$ f-ja u tački M_3 ima maksimum

$$Z_{max}\left(\frac{3}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

Zadaci za vježbu

Lokalne ekstremne vrednosti

U zadacima 3259 — 3267 naći stacionarne tačke datih funkcija.

3259. $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$. **3260.** $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

3261. $z=xy(a-x-y)$. **3262.** $z=(2ax-x^2)(2by-y^2)$.

3263. $z=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{4},\ 0<y<\frac{\pi}{4}\right)$.

3264. $z=\frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ **3265.** $z=y\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y}$.

3266. $u=2x^2+y^2+2z-xy-xz$.

3267. $u=3\ln x+2\ln y+5\ln z+\ln(22-z-y-z)$.

3268. Na sl. 60 predstavljene su nivoske linije funkcije $z=f x, y)$. Kakve osobenosti pokazuje ova funkcija u Tačkama A, B, C, D, i na pravoj EF?

3269. Funkcija z definisana je implicitno jednačinom

$$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0.$$

Naći njene stacionarne tačke.

3270. Funkcija z definisana je implicitno jednačinom

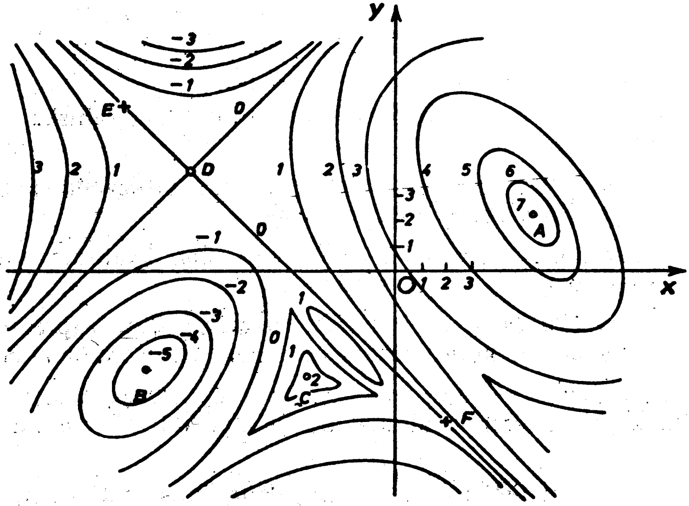
$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0.$$

Naći njene stacionarne tačke.

3271*. Naći. tačke ekstremuma funkcije

$$z=2xy-3x^2-2y^2+10.$$

3272. Naći tačke ekstremuma funkcije $z=4(x-y)-x^2-y^2$.



Sl. 60

3273. Naći tačke ekstremuma funkcije $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.

3274. Uveriti se da funkcija $z=x^2+xy+y^2+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{y}$ ima minimum u tački $x=y=\frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

3275. Uveriti se da za $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ i za $x=-\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$ funkcija $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$ ima minimum.

3276. Uveriti se da za $x=5$, $y=6$ funkcija $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$ ima minimum.

3277. Naći stacionarne tačke funkcije $z=x^3y^2(12-x-y)$, koje zadovoljavaju uslov $x>0$, $y>0$ i ispitati njihov karakter.

3278. Naći stacionarne tačke funkcije $z=x^3+y^3-3xy$ i ispitati njihov karakter.

Ekstremne vrednosti u datoj oblasti

3279. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $z=x^2-y^2$ u krugu $x^2+y^2<4$.

3280. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $z=x^2+2xy-4x+8y$ u pravougaoniku $0<x<1$, $0<y<2$.

3281. Naći najveću vrednost funkcije $z=x^2y(4-x-y)$ u trouglu koji obrazuju prave $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

3282. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ u krugu $x^2+y^2<4$.

3283. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$$

u pravougaoniku $0<x<\frac{\pi}{2}$; $0<y<\frac{\pi}{2}$.

3284. Pozitivan broj a razložiti na tri proizvoljna sabirka tako da njihov proizvod bude minimalan.

3285. Pozitivan broj a predstaviti u obliku proizvoda četiri pozitivna množitelja tako da njihov zbir bude minimalan.

3286. U ravni Oxy naći tačku za koju je zbir kvadrata odstojanja od pravih $x=0$, $y=0$, $x+2y-16=0$ minimalan.

3287. Kroz tačku (a, b, c) postaviti ravan tako da zapremina tetraedra koji ta ravan obrazuje sa koordinatnim ravnima, bude minimalna.

3288. Date su tačke $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$; u ravni Oxy naći tačku za koju će zbir kvadrata odstojanja od svih datih tačaka biti minimalan.

3289. Date su tri tačke $A(0, 0, 12)$, $B(0, 0, 4)$ i $C(8, 0, 8)$; u ravni Oxy naći tačku D tako da poluprečnik sfere koja prolazi kroz tačke $ABCD$ bude minimalan.

3290. U loptu prečnika $2R$ upisati pravougli paralelepiped maksimalne zapremine.

Uslovne ekstremne vrednosti

U zadacima 3291 — 3296 naći ekstremne vrednosti funkcija.

3291. $z = x^m + y^m \ (m>1)$ za $x+y=2$ $(x>0,\ y>0)$.

3292. $z = xy$ za $x^2+y^2=2a^2$.

3293. $z = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ za $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$.

3294. $z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$ za $y-x=\frac{\pi}{4}$.

3295. $u = x+y+z$ za $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

3296. $u = xyz$ za $\begin{cases} 1)\ x+y+z=5, \\ 2)\ xy+xz+yz=8. \end{cases}$

3297*. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2.$$

3298. $f(x, y)=x^3-3xy^2+18y$, pri čemu je $3x^2y-y^3-6x=0$. Dokazati da funkcija $f(x, y)$ dostiže ekstremum u tačkama $x=y=\pm\sqrt{3}$.

3299. Naći minimum funkcije $u=ax^2+by^2+cz^2$, pri čemu su a, b, c pozitivne konstante, a x, y, z su vezani realizacijom $x+y+z=1$.

3300. Naći najveću i najmanju vrednost funkcije

$$u=y^2+4z^2-4yz-2xz-2xy$$

pod uslovom $2x^2+3y^2+6z^2=1$.

3301. U ravni $3x-2z=0$ naći tačku za koju je zbir kvadrata odstojanja od $A(1, 1, 1)$ i $B(2, 3, 4)$ minimalan.

3302. U ravni $x+y-2z=0$ naći tačku za koju je zbir kvadrata odstojanja od ravni $x+3z=6$ i $y+3z=2$ minimalan.

3303. Date su tačke $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$, $C(4, 4, 0)$. Na površini lopte $x^2+y^2+z^2=4$ naći tačku S tako da zapremina piramide $SABC$ bude: a) maksimalna, b) minimalna. Proveriti tačnost rezultata metodama elementarne geometrije.

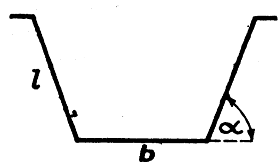
3304. Naći pravougli paralelepiped date zapremine V čija je površina minimalna.

3305. Naći pravougli paralelepiped date površine S čija je zapremina maksimalna.

3306. Naći zapreminu najvećeg pravouglog paralelepipeda koji se može upisati u elipsoid sa poluosama a, b i c.

3307. Šator date zapremine ima oblik cilindra sa konusnim završetkom. U kom odnosu moraju stajati dimenzije šatora da bi količina materijala, potrebnog za njegovu izradu, bila minimalna?

3308. Presek kanala ima oblik jednakokrakog trapeza date površine; kolike moraju biti njegove dimenzije da bi kvašena površina kanala bila najmanja? (sl. 61)



Sl. 61

3309. Od svih pravouglih paralelepipeda koji imaju datu dijagonalu naći onaj čija je zapremina maksimalna.

3310. Odrediti spoljne dimenzije otvorenog (bez poklopca) sanduka koji ima oblik pravouglog paralelepipeda sa datom debljinom zidova α i datom zapreminom V, tako da bi količina materijala potrebnog za njegovu izradu bila minimalna.

3311. Odrediti paralelepiped najveće zapremine čiji zbir svih 12 ivica ima datu vrednost $(12a)$.

3312. Oko date elipse opisati trougao najmanje površine, čija je osnovica paralelna velikoj osi elipse.

3313. Na elipsi $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ naći tačku čije je odstojanje od prave $3x-y-9=0$ minimalno, odnosno maksimalno.

3314. Na paraboli $x^2+2xy+y^2+4y=0$ naći tačku najbližu pravoj $3x-6y+4=0$.

3315. Na paraboli $2x^2-4xy+2y^2-x-y=0$ naći tačku najbližu pravoj $9x-7y+16=0$.

3316. Naći maksimalno odstojanje tačaka površine

$$2x^2+3y^2+2z^2=6$$

od ravni $z=0$.

3317. Naći stranice pravouglog trougla date površine S čiji je obim minimalan.

3318. U prav eliptični konus čije su poluose osnove a i b cm, a visina H cm, upisana je prizma sa pravougaonom osnovom tako da su osnovne ivice paralelne osama elipse, a presek dijagonala osnove leži u centru elipse. Kolike moraju biti osnovne ivice i visina prizme da bi njena zapremina bila maksimalna, i kolika je ta maksimalna zapremina?

3319. Naći pravilnu trostranu piramidu date zapremine, čiji je zbir svih ivica minimalan.

3320. Date su dve tačke elipse; odrediti položaj treće tačke elipse tako da površina trougla čija su temena pomenute tačke — bude maksimalna.

3321. Odrediti onu normalu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ čije je odstojanje od koordinatnog početka maksimalno.

3322. Na obrtnom elipsoidu $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ naći tačku čije je odstojanje od ravni $3x+4y+12z=288$ minimalno, odnosno maksimalno.

3323. Date su ravne krive $f(x, y)=0$ i $\varphi(x, y)=0$. Pokazati da će rastojanje između tačaka (α, β) i (ξ, η), od kojih prva leži na prvoj a druga na drugoj krivoj, imati ekstremnu vrednost ako su ispunjeni sledeći uslovi.

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}=\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

Koristeći se ovim rezultatom naći najkraće rastojanje između elipse $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ i prave $x+y-8=0$.

Rješenja

3259. $(0, 0), \left(-\frac{5}{3}, 0\right), (-1, 2), (-1, -2)$.

3260. $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. **3261.** $(0, 0), (0, a), (a, 0), \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

3262. $(0, 0), (0, 2b), (a, b), (2a, 0), (2a, 2b)$. **3263.** $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

3264. $\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$. **3265.** $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. **3266.** $(2, 1, 7)$. **3267.** $(6, 4, 10)$.

3268. A i C su tačke maksimuma, B — tačka minimuma; u okolini tačke D površ ima oblik „sedla“, duž prave EF funkcija zadržava konstantnu vrednost.

3269. $(-2, 0), \left(\frac{16}{7}, 0\right)$. **3270.** $(1, 1), (-1, -1)$.

3271*. Da bismo se uverili da je nađena tačka — tačka maksimuma dovoljno je predstaviti funkciju u obliku $z = 10-(x-y)^2-2x^2-y^2$.

3272. $(2, -2)$. **3273.** $(-1, 1)$. **3277.** U tački $(6,4)$ funkcija dostiže maksimum.

3278. U tački $(0, 0)$ nema ekstremuma; u tački $(1, 1)$ funkcija dostiže minimum.

3279. Najveću i najmanju vrednost funkcija dostiže na granici oblasti: najveću $z=4$ u taćkama $(2, 0)$ i $(-2, 0$, a najmanju, $z=-4$, u tačkama $(0, 2)$ i $(0, -2)$. U stacionarnoj tački $(0, 0)$ nema ekstremuma.

3280. Najveća vrednost $z=17$ u tački $(1, 2)$; najmanja vrednost $z=-3$ u tački $(1, 0)$; stacionarna tačka $(-4, 6)$ leži van date oblasti.

3281. Najveća vrednost $z=4$ u stacionarnoj tački $(2, 1)$ (ova tačka je, prema tome, tačka ekstremuma); najmanja vrednost $z=-64$ u tački $(4, 2)$ koja leži na granici oblasti.

3282. Najmanju vrednost $z=0$ funkcija dostiže u tački $(0, 0)$; najveću vrednost $z=\frac{3}{e}$ u tačkama $(0, \pm 1)$.

3283. $z_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ u tački $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $z_{min}=0$ u tački $(0, 0)$ (na granici oblasti).

3284. Svi sabirci moraju biti jednaki među sobom.

3285. Svi množitelji moraju biti jednaki među sobom.

3286. $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$. **3287.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

3288. $x=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$. **3289.** $(3, \sqrt{39}, 0)$; $(3, -\sqrt{39}, 0)$.

3290. Kocka. **3291.** U tački $(1, 1)$ je $z=2$ — minimum.

3292. (a, a) ili $(-a, -a)$, $z=a^2$ (maksimum), $(a, -a)$ ili $(-a, a)$, $z=-a^2$ (minimum).

3293. $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z=-\frac{\sqrt{2}}{a}$ (minimum), $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $z=\frac{\sqrt{2}}{a}$ (maksimum).

3294. Stacionarne tačke $x=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{a}{b}$.

3295. $(3, 3, 3)$, $u=9$ (minimum).

3296. Kad su vrednosti dveju nezavisno promenljivih -2, a vrednost treće -1, funkcija dostiže minimum -4; kad su vrednosti dveju nezavisno promenljivih $-\frac{4}{3}$, a vrednost treće $\frac{7}{3}$, funkcija dostiže maksimum $-\frac{112}{27}$.

3297*. Treba naći minimum funkcije $\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$ pod uslovom $x_1+x_2+\cdots+x_n=A$. Uopšte, važi relacija $\frac{\Sigma x_i^k}{n}>\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^k$. za $k>1$.

3299. $u_{\min}=\frac{abc}{bc+ca+ab}$ za $x=\frac{bc}{bc+ca+ab}$; $y=\frac{ac}{bc+ac+ab}$; $z=\frac{ab}{bc+ac+ab}$.

3300. $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{3}$, $z=\pm\frac{1}{6}$. **3301.** $\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$.

3302. $(3, -1, 1)$. **3303.** a) $(-2, 0, 0)$; b) $(2, 0, 0)$.

3304. Kocka. **3305.** Kocka. **3306.** $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

3307. Ako je R poluprečnik osnove šatora, H — visina cilindričnog dela, a h — visina konusnog završetka, onda moraju važiti sledeće relacije: $R=\frac{h\sqrt{5}}{2}$, $H=\frac{h}{2}$.

3308. Ako je b osnovica, l — krak, a α — ugao na osnoviii trapeza, onda mora biti $l=b=\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, pri čemu je A data površina preseka; tada je kvašena površina $u=2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{A}\approx 2{,}632\sqrt{A}$.

3309. Kocka. **3310.** Svaka od osnovnih ivica je $2\alpha+\sqrt[3]{2v}$, a visina je dva puta manja $\alpha+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$.

3311. a^3 (kocka). **3312.** Minimalna površina ima vrednost $3\sqrt{3}\,ab$.

3313. $x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$, $y=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$. **3314.** $\left(-\frac{5}{9}-\frac{1}{9}\right)$. **3315.** $(3, 5)$. **3316.** $z_{\max}=2$.

3317. Stranice trougla su $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$ i $2\sqrt{S}$.

3318. Visina je $\frac{H}{3}$, osnovne ivice su $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ i $\frac{2b\sqrt{2}}{3}$, a zapremina $V=\frac{8}{27}abH$.

3319. Tetraedar.

3320. Normala elipse u traženoj tački mora biti normalna na pravoj koja spaja date tačke.

3321. Normalu povući u tački sa koordinatama

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \pm b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).$$

3322. $\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$; $\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$. **3323.** $2\sqrt{2}$.